

Квантовая механика. Физический факультет, 4 курс, 7 семестр.

Занятие №14. Квазиклассическое приближение: правило квантования Бора-Зоммерфельда.

1. Уравнение Шредингера в квазиклассическом приближении

$$\psi = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sigma\right),$$

$$\frac{1}{2m}(\hbar\sigma')^2 - \frac{i\hbar}{2m}\sigma'' = E - U(x),$$

$$\sigma = \sigma_0 + \left(\frac{\hbar}{i}\right)\sigma_1 + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\sigma_2 + \dots$$

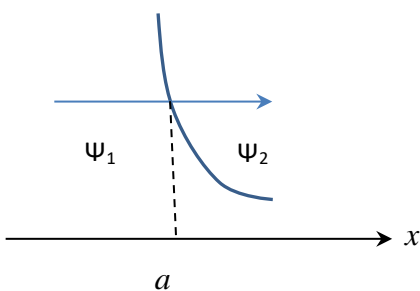
Общее решение квазиклассического УШ с точностью до σ_1 имеет вид:

$$\psi(x) = \frac{C_1}{\sqrt{p}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int p(x) dx\right) + \frac{C_2}{\sqrt{p}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int p(x) dx\right) \quad \text{— в классически доступной области}$$

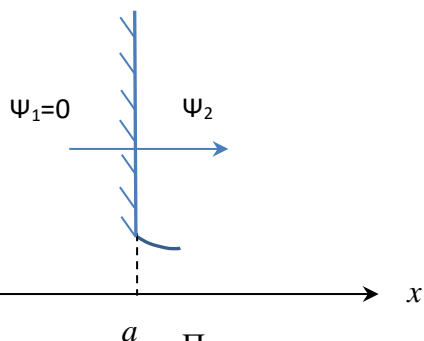
$$\psi(x) = \frac{C_1}{\sqrt{|p|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int |p(x)| dx\right) + \frac{C_2}{\sqrt{p}} \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int |p(x)| dx\right) \quad \text{— в классически недоступной области.}$$

Условие применимости: $\left| \hbar \frac{dp}{dx} \right| \ll |p|$, $p(x) = \sqrt{2m(E - U(x))}$; $\lambda = \frac{\hbar}{p(x)}$.

2. Граничные условия для квазиклассической волновой функции (условия «сшивки»).

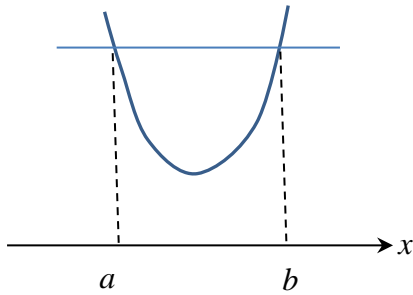


$$\frac{C}{2\sqrt{|p|}} \exp\left[\frac{1}{\hbar} \int_x^a |p| dx\right] \rightarrow \frac{C}{\sqrt{p}} \sin\left[\frac{1}{\hbar} \int_a^x p dx + \frac{\pi}{4}\right]$$



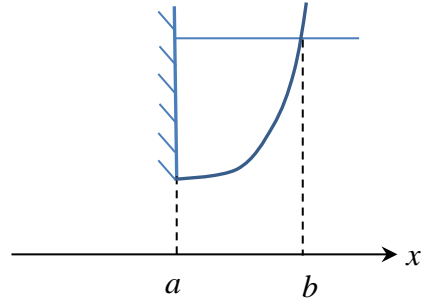
$$0 \rightarrow \frac{C}{\sqrt{p}} \sin\left[\frac{1}{\hbar} \int_a^x p dx\right]$$

2.1. a Правило квантования Бора-Зоммерфельда.



$$\int_a^b p dx = \pi \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

или $\oint p dx = 2\pi \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right).$



$$\int_a^b p dx = \pi \hbar \left(n + \frac{3}{4} \right).$$

или $\oint p dx = 2\pi \hbar \left(n + \frac{3}{4} \right).$

Задача 1. Получить квазиклассическое выражение для уровней энергии линейного осциллятора. (ГКК № 9.1)

Задача 2. Получить квазиклассическое выражение для уровней энергии частицы в бесконечно глубокой яме $U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, x > a; \\ 0, & 0 < x < a. \end{cases}$

Задача 3. Получить квазиклассическое выражение для уровней энергии частицы в поле $U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0; \\ mgx, & x > 0. \end{cases}$ (ГКК № 9.3)

Домашнее задание: ЕК Гл.7 № 3-6.

Задача 1. Найти ВКБ-спектр частицы в потенциале Морзе $U(x) = U_0(e^{x/a} - 1)^2$. (ЕК Гл.7 № 3)

Задача 2. Найти ВКБ-спектр частицы в потенциале $U(x) = -U_0 \operatorname{ch}^{-2}(x/a)$. (ЕК Гл.7 № 4)

Задача 3. Найти ВКБ-спектр частицы в потенциале $U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2(\pi x/a), |x| < a/2$. (ЕК Гл.7 № 5)

Задача 4. Найти ВКБ-спектр частицы в потенциале $U(x) = U_0 \left(\frac{a}{x} - \frac{x}{a} \right)^2, x > 0$. (ЕК Гл.7 №6)

ГКК - Галицкий Е.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике, 1981;

ЕК - Елютин П.В., Кривченков В.Д. Квантовая механика, 1976

ЛЛ - Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика